

时间尺度上 Nabla 变分问题的 非完整力学系统的 Noether 理论*

祖启航, 朱建青

(苏州科技大学数理学院, 江苏 苏州 215009)

摘要: 研究了时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整力学系统的 Noether 理论。根据时间尺度上的微积分理论和 Delta 导数与 Nabla 导数之间关系, 建立了时间尺度上 Nabla 导数的非完整 Lagrange 方程。根据时间尺度上 Nabla 变分问题的 Hamilton 作用量在无限小变换下的变换性质, 建立了 Nabla 变分问题的非完整力学系统的 Noether 等式, 并找到了相应的守恒量。最后, 举例说明结果的应用。

关键词: 时间尺度; Nabla 变分; 非完整系统; Noether 等式; 守恒量

中图分类号: 0316 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2017)01-0058-08

Noether theorem for nonholonomic mechanical systems of Nabla variational problem on time scales

ZU Qihang, ZHU Jianqing

(College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology,
Suzhou 215009, China)

Abstract: The Noether theorem for nonholonomic mechanical systems of Nabla variational problem on time scales is studied. Firstly, based on the relationship between the Delta calculus and the Nabla calculus on time scales and the theory of time scale, the nonholonomic Lagrange equation for Nabla variational problem on time scales is established. Secondly, according to invariance of the Hamilton action under the infinitesimal transformation of Nabla variational problem on time scales, the Noether identity for nonholonomic mechanical systems is established, and the corresponding Noether conserved quantity is obtained. Finally, an example is presented to illustrate the application of the results.

Key words: time scales; Nabla variation; nonholonomic systems; Noether identity; conserved quantity

1988 年德国学者 Hilger^[1]在他的博士论文中提出时间尺度的微积分理论, 其主要目的是把连续和离散进行统一^[2-3]。然而时间尺度上的微积分定理并不是唯一的, 一般有两种方法: 一种是针对前跳算子定义的 Delta 微积分理论, 另一种是针对后跳算子定义的 Nabla 微积分理论^[4]。对 Delta 变分问题的研究已经取得了许多成果^[5-10]。事实上在求解最优化控制、经济学模型等领域利用 Nabla 微积

分求解更为方便^[11]。2001 年, Atici 和 Guseinov^[4]给出了 Nabla 微积分理论。随后, Martins 和 Torres^[12]进一步研究了 Nabla 微积分理论, 并将理论推广到高阶系统。Caputo^[13]定义了对偶时间尺度, 研究了 Delta 导数和 Nabla 导数之间的变换关系, 进一步给出了 Nabla 导数的 Euler-Lagrange 函数。为了研究不同算子在对不同导数情况下的关系, Bourdin^[14]对前跳算子在 Nabla 导数情况下进

* 收稿日期: 2016-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(11572212); 苏州科技大学研究生科研创新计划(SKCX15_061)

作者简介: 祖启航(1991年生), 男, 研究方向: 力学中的数学方法; E-mail: zqhusts@163.com

通信作者: 朱建青(1962年生), 男, 研究方向: 应用数学; E-mail: zjq@mail.usts.edu.cn

行了探讨，建立了求导法则，并进一步给出了混合导数的 Euler-Lagrange 函数。

对称性与守恒量是分析力学研究的一个重要方面。尽管在约束力学系统的对称性与守恒量方面的研究已经取得了一系列重要成果^[15-26]。但对于时间尺度上 Nabla 变分问题的对称性与守恒量的研究还很少。Martins 和 Torres 利用 Delta 微积分和 Nabla 微积分理论之间关系，通过 Delta 变分问题的完整力学系统的 Noether 定理^[22]，给出了 Nabla 导数的完整力学系统的对称性，并找到相应的守恒量^[27]。本文基于时间尺度的微积分理论，以及 Delta 导数和 Nabla 导数之间的交换关系，根据时间尺度上 Delta 变分问题的非完整 Lagrange 方程，建立了时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整 Lagrange 方程，结合时间尺度上 Delta 变分问题的 Lagrange 系统的 Noether 相关定理，建立了时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整力学系统的 Noether 等式，并找到相应的 Noether 守恒量。文末，举例说明相关结论的应用。

1 时间尺度上的微积分理论

时间尺度上 Delta (Δ) 微积分理论详见文献 [9]。文章重点介绍 Nabla (∇) 微积分理论。

实数集 \mathbb{R} 的任何一非空闭子集 \mathbb{T} 称为一个时间尺度^[2-3]。时间尺度 \mathbb{T} 具有由 \mathbb{R} 诱导的拓扑及序关系。常见的情况整数集 \mathbb{Z} ，自然数集 \mathbb{N} 都是一种时间尺度。

定义 1 设 \mathbb{T} 是一时间尺度，对任意的 $t \in \mathbb{T}$ ，定义前跳算子 σ 为

$$\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \sigma(t) = \inf\{x \in \mathbb{T}; x > t\}$$

后跳算子 ρ 为

$$\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \rho(t) = \sup\{x \in \mathbb{T}; x < t\}$$

补充定义: $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}, \sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ 。定义前跳步差函数 $\mu: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, \mu(t) = \sigma(t) - t$ ，后跳步差函数 $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, v(t) = t - \rho(t)$ 。

定义 2 若 $\sigma(t) > t$ ，则称 t 为右离散；若 $\sigma(t) = t$ ，则称 t 为右稠密；若 $\rho(t) < t$ ，则称 t 为左离散；若 $\rho(t) = t$ ，则称 t 为左稠密。

对于时间尺度 \mathbb{T} ，如果 $\mathbb{T} < \infty$ ，定义 $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}]$ ， $\mathbb{T} = \infty$ ，则 $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ ；如果 $\mathbb{T} > -\infty$ ，定义 $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} \setminus [\inf \mathbb{T}, \sigma(\inf \mathbb{T}))$ ， $\mathbb{T} = -\infty$ ，则 $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$ 。特别地，如果 $a, b \in \mathbb{T}, a < b$ ，定义时间尺度上的区间 $[a, b]$ ，则 $[a, b]^k = [a, \rho(b)]$ ， $[a, b]_k = [\sigma(a), b]$ 。

设函数 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}$ 。定义 $f^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)), f^\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 为 } f^\rho(t) = f(\rho(t)) \forall t \in \mathbb{T}。$$

定义 3 设函数 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}^k$ ，如果存在一个数 α ，对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 t 的一个小邻域 $U \subset \mathbb{T}$ ，当 $x \in U$ 时，都有 $|f(\sigma(t)) - f(x) - \alpha(\sigma(t) - x)| < \varepsilon|\sigma(t) - x|$ ，则称函数 f 在点 t 处是 Δ (Delta) 可微的，并称数 α 是函数 f 在点 t 处的 Δ (Delta) 导数，记为 $f^\Delta(t)$ 。

引理 1 如果函数 f 在点 t 处是 Δ 可微的，那么 $f^\sigma(t) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$ 。

定义 4 设函数 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}^k$ ，如果存在一个数 β ，对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 t 的一个小邻域 $U \subset \mathbb{T}$ ，当 $x \in U$ 时，都有 $|f(\rho(t)) - f(x) - \beta(\rho(t) - x)| < \varepsilon|\rho(t) - x|$ ，则称函数 f 在点 t 处是 ∇ (Nabla) 可微的，并称数 β 是函数 f 在点 t 处的 ∇ (Nabla) 导数，记为 $f^\nabla(t)$ 。

引理 2 如果函数 f 在点 t 处是 ∇ 可微的，那么 $f^\rho(t) = f(t) - \nu(t)f^\nabla(t)$ 。

定义 5 如果函数 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ，在 \mathbb{T} 中一切右稠密点连续且在左稠密点处存在有限左极限，则称函数 f 为右稠密连续的。在 \mathbb{T} 上所有右稠密连续函数的集合记作 $C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ 。如果函数 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ，在 \mathbb{T} 中一切左稠密点连续且在右稠密点处存在有限右极限，则称函数 f 为左稠密连续的。在 \mathbb{T} 上所有左稠密连续函数的集合记作 $C_{ld}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ 。

定义 6 设 \mathbb{T} 为任意时间尺度，令 $\mathbb{T}^* = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{T}\}$ ，则新的时间尺度 \mathbb{T}^* 称为 \mathbb{T} 的对偶时间尺度。

如果时间尺度 \mathbb{T} 上的前跳算子和后跳算子分别为 σ, ρ ，则 $\hat{\sigma}, \hat{\rho}$ 分别为时间尺度 \mathbb{T}^* 上的前跳算子和后跳算子； \mathbb{T} 上的前跳步差函数 μ 和后跳步差函数 ν ，则 \mathbb{T}^* 上的前跳步差函数为 $\hat{\mu}$ 和后跳步差函数为 $\hat{\nu}$ ； \mathbb{T} 上的 Δ (或 ∇) 导数，则 \mathbb{T}^* 上为 $\hat{\Delta}$ (或 $\hat{\nabla}$) 导数。

定义 7 设时间尺度 \mathbb{T} 上的函数为 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ，那么定义在时间尺度 \mathbb{T}^* 上的对偶函数为 $f^*: \mathbb{T}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ，并且 $f^*(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{T}$ 。

引理 3^[13] 给定时间尺度 $\mathbb{T}, a, b \in \mathbb{T}, a < b, f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ，那么有如下关系式：

$$(\mathbb{T}^k)^* = (\mathbb{T})_k^*, (\mathbb{T}_k)^* = (\mathbb{T}^*)^k;$$

$$([a, b])^* = [-b, a],$$

$$([a, b]^k)^* = [-b, -a]_k \subseteq \mathbb{T}^*;$$

$$\hat{\sigma}(x) = -\rho(-x) = -\rho^*(x),$$

$$\hat{\rho}(x) = -\sigma(-x) = -\sigma^*(x), \forall x \in \mathbb{T}^*;$$

$$\hat{\nu}(x) = \mu^*(x), \hat{\mu}(x) = \nu^*(x), \forall x \in \mathbb{T}^*;$$

函数 f 是右稠连续 (左稠连续) 当且仅当对偶函数 f^* 是左稠连续 (右稠连续);

如果 f 在 $t \in \mathbb{T}^k (t \in \mathbb{T}_k)$ 点是 $\Delta (\nabla)$ 可微, 则对偶函数函数 f^* 在 $-t \in (\mathbb{T}^*)_k (-t \in (\mathbb{T}^*)^k)$ 点是 $\nabla (\Delta)$ 可微, 并且有关系式:

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= - (f^*)^{\hat{\nabla}}(-t), \\ f^{\nabla}(t) &= - (f^*)^{\hat{\Delta}}(-t); \\ f^\Delta(t) &= - ((f^*)^{\hat{\nabla}})^*(t), \\ f^{\nabla}(t) &= - ((f^*)^{\hat{\Delta}})^*(t); \\ (f^\Delta)^*(-t) &= - (f^*)^{\hat{\nabla}}(-t), \\ (f^{\nabla})^*(-t) &= - (f^*)^{\hat{\Delta}}(-t) \end{aligned}$$

$f \in C_{rd}^1(C_{ld}^1)$ 当且仅当对偶函数 $f^* \in C_{ld}^1(C_{rd}^1)$;

如果函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是右稠连续, 则 $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_{-b}^{-a} f^*(x) \hat{\nabla} x$; 如果函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是左稠连续, 则 $\int_a^b f(t) \nabla t = \int_{-b}^{-a} f^*(x) \hat{\Delta} x$

如果函数 $h, j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是左稠连续, $h^*, j^*: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}$ 是右稠连续, 则有积分等式:

$$\begin{aligned} &\int_{-b}^{-a} h^*(t) (j^*)^{\hat{\Delta}}(t) \hat{\Delta} t = \\ &\quad - \int_a^b h(x) j^{\nabla}(x) \nabla x; \\ &\int_{-b}^{-a} (h^*)^{\hat{\Delta}}(t) (j^*)^{\hat{\sigma}}(t) \hat{\Delta} t = \\ &\quad - \int_a^b h^{\nabla}(x) j^{\sigma}(x) \nabla x; \\ &\int_a^b h(x) j^{\nabla}(x) \nabla x = \\ &\quad - h(a)j(a) + h(b)j(b) - \int_a^b h^{\nabla}(x) j^{\sigma}(x) \nabla x \end{aligned}$$

一般情况下, 对于函数的 Δ 和 ∇ 导数具有相同的表达形式, 如和函数、积函数等, 具体证明过程见文献 [12]。 Δ 导数与等时变分之间的交换关系^[23],

$$\delta q^\Delta = (\delta q)^\Delta, \delta q^\sigma = (\delta q)^\sigma$$

同样易得 ∇ 导数与等时变分交换关系:

$$\delta q^\nabla = (\delta q)^\nabla, \delta q^\rho = (\delta q)^\rho$$

上式可称为 ∇ 导数与非等时变分间的交换关系。

2 时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整力学系统的微分方程

首先考虑由 Bohner 定义的时间尺度上的基本变分问题^[5]

$$\bar{I}[h_s(\cdot)] = \int_a^b \bar{L}(x, h_s^\sigma(x), h_s^\Delta(x)) \Delta x \rightarrow \min,$$

$$h_s(a) = A, h_s(b) = B (s = 1, \dots, n) \quad (1)$$

其中 $\bar{L}: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, c, d \in \mathbb{T}, a < b; A, B \in \mathbb{R}^n$ 。

再考虑 ∇ 导数形式的基本变分问题

$$I[q_s(\cdot)] = \int_c^d L(t, q_s^\rho(t), q_s^\nabla(t)) \nabla t \rightarrow \min,$$

$$q_s(c) = C, q_s(d) = D (s = 1, \dots, n) \quad (2)$$

其中 $L: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, c, d \in \mathbb{T}, c < d; C, D \in \mathbb{R}^n$ 。

假设时间尺度上动力学系统的运动受 g 个双面理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, q_s^\rho, q_s^\nabla) = 0,$$

$$(s = 1, \dots, n; \beta = 1, \dots, g) \quad (3)$$

则非完整约束加在虚位移 δq_s^ρ 上的限制为 Appell-Chetaev 条件

$$\partial_3 f_\beta(t, q_s^\rho, q_s^\nabla) \delta q_s^\rho = 0 \quad (4)$$

式中 $\partial_i f$ 表示函数 f 关于第 i 个变量的偏导数。则称 (4) 式为带有 ∇ 导数的 Chetaev 条件。

在基本变分问题 (1) 下, 已知时间尺度上 Delta 变分问题的非完整力学系统的微分方程为^[23]

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta x} \partial_3 \bar{L}(x, \bar{q}_s^\sigma(x), \bar{q}_s^\Delta(x)) - \partial_2 \bar{L}(x, \bar{q}_s^\sigma(x), \bar{q}_s^\Delta(x)) = \\ \bar{Q}_s(x, \bar{q}_k^\sigma(x), \bar{q}_k^\Delta(x)) + \bar{\lambda}_\beta \partial_3 \bar{f}_\beta(x, \bar{q}_s^\sigma(x), \bar{q}_s^\Delta(x)), \\ (s, k = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\bar{L}(x, \bar{q}_s^\sigma(x), \bar{q}_s^\Delta(x))$ 为 Lagrange 函数, $\bar{Q}_s(x, \bar{q}_k^\sigma(x), \bar{q}_k^\Delta(x))$ 为非保守力, $\bar{f}_\beta(x, \bar{q}_s^\sigma(x), \bar{q}_s^\Delta(x))$ 为 Chetaev 型非完整约束, $\bar{\lambda}_\beta$ 为 Lagrange 乘子。

定义 8 设 Lagrange 函数为 $L: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 非保守力为 $Q: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 非完整约束 $f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, λ 为 Lagrange 乘子, 则定义相应的对偶 Lagrange 函数为 $L^*: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 对偶非保守力为 $Q^*: \mathbb{T}^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 对偶非完整约束 $f^*: \mathbb{T}^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 对偶 Lagrange 乘子为 λ^* , 并且 $L^*(x, w, v) = L(-x, w, -v)$, $Q^*(x, w, v) = Q(-x, w, -v)$, $f^*(x, w, v) = f(-x, w, -v)$, $\lambda^* = -\lambda, \forall (x, w, v) \in \mathbb{T}^* \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 。

根据引理 3 和定义 8 可得如下引理。

引理 4 给定连续的 Lagrange 函数 $L: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 则当 $q_s \in C_{rd}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ 时,

$$\int_a^b L(t, q_s^\sigma(t), q_s^\Delta(t)) \Delta t =$$

$$\int_{-b}^{-a} L^*(x, (q_s^*)^{\hat{\rho}}(x), (q_s^*)^{\hat{\nabla}}(x)) \hat{\nabla} x$$

假设 q_s 是基本变分问题 (2) 的局部最小值, 则根据引理 4 有

$$\begin{aligned} I^*[\eta_s(\cdot)] &= \int_{-d}^{-c} L^*(x, \eta_s^{\hat{\sigma}}(x), \eta_s^{\hat{\Delta}}(x)) \hat{\Delta} x \rightarrow \min, \\ \eta(-c) &= C, \eta(-d) = D \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $\eta \in C_{rd}^1$ 。那么变分问题 (6) 和变分问题 (1) 具有同样的表达形式, 因此根据变分问题 (1) 下时间尺度上非完整 Lagrange 系统的微分方程 (5), 则在变分问题 (6) 下, 时间尺度上 Delta 变分问题的非完整 Lagrange 系统的微分方程有^[23]:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta}{\Delta x} \partial_3 L^*(x, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(x), (q_s^*)^{\Delta}(x)) - \\ & \partial_2 L^*(x, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(x), (q_s^*)^{\Delta}(x)) = \\ & Q_s^*(x, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(x), (q_s^*)^{\Delta}(x)) + \\ & \lambda^* \partial_3 f_{\beta}^*(x, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(x), \\ & (q_s^*)^{\Delta}(x)), \forall x \in [-d, -c]^k \end{aligned} \quad (7)$$

根据对偶时间尺度的等式关系

$$\begin{aligned} \partial_3 L^*(t, w, v) &= -\partial_3 L(-t, w, -v), \\ \partial_2 L^*(t, w, v) &= \partial_2 L(-t, w, -v) \end{aligned} \quad (8)$$

易得

$$\begin{aligned} & \partial_3 L^*(x, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(x), (q_s^*)^{\Delta}(x)) = \\ & -\partial_3 L(-x, q_s^{\rho}(-x), q_s^{\nabla}(-x)), \\ & \partial_2 L^*(x, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(x), (q_s^*)^{\Delta}(x)) = \\ & \partial_2 L(-x, q_s^{\rho}(-x), q_s^{\nabla}(-x)), \\ & \partial_3 f^*(x, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(x), (q_s^*)^{\Delta}(x)) = \\ & -\partial_3 f(-x, q_s^{\rho}(-x), q_s^{\nabla}(-x)), \\ & Q_s^*(x, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(x), (q_s^*)^{\Delta}(x)) = \\ & Q_s(-x, q_s^{\rho}(-x), q_s^{\nabla}(-x)), \lambda_{\beta}^* = -\lambda_{\beta} \end{aligned} \quad (9)$$

根据引理 3 的基本公式, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta}{\Delta x} \partial_3 L^*(x, (q_s^{\nabla})^{\hat{\sigma}}(x), (q_s^{\nabla})^{\Delta}(x)) = \\ & \frac{\nabla}{\nabla x} \partial_3 L(-x, q_s^{\rho}(-x), q_s^{\nabla}(-x)), \\ & \forall x \in [-d, -c]^k \end{aligned} \quad (10)$$

令 $-x = t, t \in [c, d]_k$, 然后将 (9)、(10) 式代入 (7) 式中, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla}{\nabla t} \partial_3 L(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) - \partial_2 L(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) = \\ & Q_s(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) + \lambda_{\beta} \partial_3 f_{\beta}(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)), \\ & \forall t \in [c, d]_k (s = 1, \dots, n; \beta = 1, \dots, g) \end{aligned} \quad (11)$$

方程 (11) 就称为时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整 Lagrange 系统的运动微分方程。与方程 (5) 有相同的表达形式。在运动微分方程积分之前, 可由 (3)、(11) 式求出 λ_{β} 作为 $t, q_s^{\rho}, q_s^{\nabla}$ 的函数。这样, 方程 (11) 可表为

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla}{\nabla t} \partial_3 L(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) - \partial_2 L(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) = \\ & Q_s(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) + \Lambda_s(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) \\ & (s, k = 1, \dots, n; \beta = 1, \dots, g) \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} & \Lambda_s(t, q_k^{\rho}(t), q_k^{\nabla}(t)) = \\ & \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t))}{\partial q_s^{\nabla}(t)} \end{aligned} \quad (13)$$

则称方程 (12) 与时间尺度上非完整系统 (3), (11) 相应的时间尺度上完整系统的运动方程。

3 时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整力学系统的 Noether 定理

假设 $a, b \in \mathbb{T}, a < b$ 。令集合 $V = \{q_s \mid q_s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, q_s \in C_{ld}^1\}$, 考虑 ∇ 导数形式的基本变分问题

$$I[q_s(\cdot)] = \int_a^b L(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) \nabla t \quad (14)$$

引入时间和广义坐标的无线小变换

$$\begin{cases} \bar{t} = T(t, q_k, \varepsilon) = t + \varepsilon \tau(t, q_k) + o(\varepsilon), \\ \bar{q}_s = H_s(t, q_k, \varepsilon) = q_s + \varepsilon \xi_s(t, q_k) + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (15)$$

这里 ε 为无限小参数, τ, ξ_s 为无限小变换的生成函数。 $\tau: [t_a, t_b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \xi_s: [t_a, t_b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 ∇ 可微函数。假设对任意 $q_s \in V$ 和 ε , 映射 $t \in [t_a, t_b] \mapsto \alpha(t) := T(t, q_s, \varepsilon) \in \mathbb{R}$ 是左稠连续的函数, 而且它是在新的时间尺度上带有后跳算子 $\bar{\rho}$ 和导数 $\bar{\nabla}$ 的一个象。

定义 9 称 (14) 式在无限小变换 (15) 下为广义准对称不变量, 当且仅当对任意子集 $[t_a, t_b]_k \subseteq [a, b]_k, q_s \in V$

$$\begin{aligned} & \int_{t_a}^b L(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t)) \nabla t = \\ & \int_{t_a}^b L(\bar{t}, \bar{q}_s^{\rho}(\bar{t}), \bar{q}_s^{\nabla}(\bar{t})) \bar{\nabla} \bar{t} + \\ & \int_{t_a}^b \left(\frac{\nabla}{\nabla t} (\bar{\Delta} G) + (Q_s + \Lambda_s) \delta q_s^{\rho} \right) \nabla t \end{aligned} \quad (16)$$

这里 $Q_s = Q_s(t, q_k^{\rho}(t), q_k^{\nabla}(t))$ 是非保守力, $G = G(t, q_s^{\rho}(t), q_s^{\nabla}(t))$ 是规范函数, $\bar{\Delta}$ 为全变分, 并且有 $\bar{\Delta} G = \varepsilon G$ 。

定义 10 对于满足非完整力学系统的运动方程 (13), 称变量 $C(t, q_s, q_s^{\rho}, q_s^{\nabla})$ 是守恒量, 当且仅当 $\frac{\nabla}{\nabla t} C(t, q_s, q_s^{\rho}, q_s^{\nabla}) = 0, \forall q_s \in V$ 。

定理 1 如果作用量方程 (14) 是变换 (15) 下的广义准对称不变量, 对所有 $t \in [t_a, t_b]_k$, 那么

$$\begin{aligned} & \partial_1 L(t, q_s^{\rho}, q_s^{\nabla}) \tau(t, q_k) + \\ & \partial_2 L(t, q_s^{\rho}, q_s^{\nabla}) \xi_s^{\rho}(t, q_k) + \\ & \partial_3 L(t, q_s^{\rho}, q_s^{\nabla}) \xi_s^{\nabla}(t, q_k) + \end{aligned}$$

$$L(t, q_s^\rho, q_s^\nabla) \tau^\nabla(t, q_k) - \partial_3 L(t, q_s^\rho, q_s^\nabla) \cdot \tau^\nabla(t, q_k) q_s^\nabla(t) + (Q_s(t, q_k^\rho, q_k^\nabla) + \Lambda_s(t, q_k^\rho, q_k^\nabla)) [\xi_s^\rho(t, q_k) - \tau^\rho(t, q_k) \cdot (q_s^\nabla - \nu(t) q_s^{\nabla\nabla})] = -\frac{\nabla}{\nabla t} G(t, q_s^\rho, q_s^\nabla) \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau^\rho(t, q_k(t)) &= \tau(\rho(t), q_k(\rho(t))), \\ \tau^\nabla(t, q_k(t)) &= \frac{\nabla}{\nabla t} \tau(t, q_k(t)), \\ \xi_s^\rho(t, q_k(t)) &= \xi(\rho(t), q_k(\rho(t))), \\ \xi_s^\nabla(t, q_k(t)) &= \frac{\nabla}{\nabla t} \xi_s(t, q_k(t)), \\ q_s^{\nabla\nabla}(t) &= (q_s^\nabla(t))^{\nabla} \end{aligned}$$

证明 根据引理 4, ∇ 导数形式的作用量方程 (14) 为

$$I^* [y_s(\cdot)] = \int_{-b}^{-a} L^*(t, y_s^{\hat{\sigma}}(t), y_s^{\Delta}(t)) \Delta t \quad (18)$$

则 $\forall t \in [-t_b, -t_a]^k \subseteq [-b, -a]^k$, 由 Δ 和 ∇ 积分等式, Δ 和 ∇ 导数与等时变分之间的交换关系, 则广义准对称不变量的充要条件 (16) 式为

$$\begin{aligned} \int_{-t_b}^{-a} L^*(t, (y_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (y_s^*)^{\Delta}(t)) \Delta t &= \\ \int_{-t_b}^{-a} L^*(\bar{t}, (\bar{y}_s^*)^{\hat{\sigma}}(\bar{t}), (\bar{y}_s^*)^{\Delta}(\bar{t})) \bar{\Delta} t &+ \\ \int_{-t_b}^{-a} \left(\frac{\Delta}{\Delta t} (\bar{\Delta}(-G^*)) + (Q_s^* + \Lambda_s^*) \delta y_s^{\hat{\sigma}} \right) \Delta t & \end{aligned} \quad (19)$$

令集合 $\bar{U} = \{y_s \mid y_s: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$, 则时间和广义坐标的无线小变换 (15) 式为

$$\begin{cases} \bar{t} = t - \varepsilon \tau^*(t, y_k) + o(\varepsilon), \\ \bar{y}_s = y_s + \varepsilon \xi_s^*(t, y_k) + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (20)$$

这里 $\tau^*(t, u) = \tau(-t, u)$, $\xi_s^*(t, u) = \xi_s(-t, u)$ 。对 $\forall y_s \in \bar{U}$, 在无限小变换 (20) 下, I^* 是广义准对称不变量的充要条件是 (19) 式成立。故根据时间尺度上 Delta 变分问题的非完整力学系统的 Noether 等式^[23], 有

$$\begin{aligned} \partial_1 L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\Delta}(t)) \cdot \\ (-\tau^*(t, q_k^*(t))) + \partial_2 L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), \\ (q_s^*)^{\Delta}(t)) ((\xi_s^*)^{\hat{\sigma}}(t, q_k^*(t))) + \\ \partial_3 L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\Delta}(t)) \cdot \\ ((\xi_s^*)^{\Delta}(t, q_k^*(t))) + \\ L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\Delta}(t)) \cdot \\ ((-\tau^*)^{\Delta}(t, q_k^*(t))) - \partial_3 L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (q_s^*)^{\Delta}(t)) ((-\tau^*)^{\Delta}(t, q_k^*(t))) (q_s^*)^{\Delta}(t) + \\ (Q_s^*(t, (q_k^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_k^*)^{\Delta}(t)) + \\ \Lambda_s^*(t, (q_k^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_k^*)^{\Delta}(t))) \cdot \\ [(\xi_s^*)^{\hat{\sigma}}(t, q_k^*(t)) - (-\tau^*)^{\hat{\sigma}} \cdot \\ (t, q_k^*(t)) ((q_s^*)^{\Delta}(t) + \hat{\mu}(t) (q_s^*)^{\Delta\Delta}(t))] = \\ -\frac{\Delta}{\Delta t} (-G^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\Delta}(t))) \quad (21) \end{aligned}$$

利用 Δ 和 ∇ 导数之间的关系, 有如下等式

$$\begin{cases} (q_s^*)^{\Delta}(t) = -q_s^{\nabla}(-t), (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t) = \\ q_s^{\rho}(-t), \hat{\mu}(t) = \nu(-t), \\ \partial_1 L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\Delta}(t)) = \\ -\partial_1 L(-t, q_s^{\rho}(-t), q_s^{\nabla}(-t)), \\ L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\Delta}(t)) = \\ L(-t, q_s^{\rho}(-t), q_s^{\nabla}(-t)), \\ \Lambda_s^*(t, (q_k^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_k^*)^{\Delta}(t)) = \\ \Lambda_s(-t, q_k^{\rho}(-t), q_k^{\nabla}(-t)), \\ G^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\Delta}(t)) = \\ G(-t, q_s^{\rho}(-t), q_s^{\nabla}(-t)), \\ \tau^*(t, q_k^*(t)) = \tau(-t, q_k(-t)), \\ \xi_s^*(t, q_k^*(t)) = \xi_s(-t, q_k(-t)), \\ (q_s^*(t))^{\Delta\Delta} = (- (q_s^{\nabla})^*) \cdot \\ (t))^{\Delta} = q_s^{\nabla\nabla}(-t) \end{cases} \quad (22)$$

利用 (9) 式, 并将 (22) 式代入 (21) 式中, 得

$$\begin{aligned} \partial_1 L(-t, q_s^{\rho}(-t), q_s^{\nabla}(-t)) \tau(-t, q_k(-t)) + \\ \partial_2 L(-t, q_s^{\rho}(-t), q_s^{\nabla}(-t)) \xi_s^{\rho}(-t, q_k(-t)) + \\ \partial_3 L(-t, q_s^{\rho}(-t), q_s^{\nabla}(-t)) \xi_s^{\nabla}(-t, q_k(-t)) + \\ L(t, q_s^{\rho}, q_s^{\nabla}) \tau^\nabla(-t, q_k(-t)) - \\ \partial_3 L(-t, q_s^{\rho}(-t), q_s^{\nabla}(-t)) \tau^\nabla \cdot \\ (-t, q_k(-t)) q_s^{\nabla}(-t) + \\ (Q_s(-t, q_k^{\rho}(-t), q_k^{\nabla}(-t)) + \\ \Lambda_s(-t, q_k^{\rho}(-t), q_k^{\nabla}(-t))) \cdot \\ [\xi_s^{\rho}(-t, q_k(-t)) - \tau^\rho(-t, q_k(-t)) \cdot \\ (q_s^{\nabla}(-t) - \nu(-t) q_s^{\nabla\nabla}(-t))] = \\ -\frac{\nabla}{\nabla t} G(-t, q_s^{\rho}(-t), q_s^{\nabla}(-t)) \quad (23) \end{aligned}$$

令 $x \in [t_a, t_b]_k \subseteq [a, b]_k, x = -t$, 则上式为

$$\begin{aligned} \partial_1 L(x, q_s^{\rho}(x), q_s^{\nabla}(x)) \tau(x, q_k(x)) + \\ \partial_2 L(x, q_s^{\rho}(x), q_s^{\nabla}(x)) \xi_s^{\rho}(x, q_k(x)) + \\ \partial_3 L(x, q_s^{\rho}(x), q_s^{\nabla}(x)) \xi_s^{\nabla}(x, q_k(x)) + \\ L(x, q_s^{\rho}(x), q_s^{\nabla}(x)) \tau^\nabla(x, q_k(x)) - \\ \partial_3 L(x, q_s^{\rho}(x), q_s^{\nabla}(x)) \tau^\nabla(x, q_k(x)) q_s^{\nabla}(x) + \\ (Q_s(x, q_k^{\rho}(x), q_k^{\nabla}(x)) + \Lambda_s(x, q_k^{\rho}(x), q_k^{\nabla}(x))) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\xi_s^\rho(x, q_k(x)) - \tau^\rho(x, q_k(x)) \cdot \\ & (q_s^\nabla(x) - \nu(x)q_s^{\nabla\nabla}(x))] = \\ & - \frac{\nabla}{\nabla t} G(x, q_s^\rho(x), q_s^\nabla(x)) \end{aligned} \quad (24)$$

则证得定理 1。(17) 可称为时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整力学系统的 Noether 等式。

定理 2 如果泛函 I 是定义 10 下的广义准对称不变量, 那么有守恒量

$$\begin{aligned} & C(t, q_s(t), q_s^\rho(t), q_s^\nabla(t)) = \\ & L(t, q_s^\rho(t), q_s^\nabla(t))\tau(t, q_k(t)) + \\ & \partial_1 L(t, q_s^\rho(t), q_s^\nabla(t)) \cdot \nu(t) \cdot \tau(t, q_k(t)) + \\ & \partial_3 L(t, q_s^\rho(t), q_s^\nabla(t)) \cdot (\xi_s(t, q_k(t)) - \\ & \tau(t, q_k(t)) \cdot q_s^\nabla(t)) + \\ & G(t, q_s^\rho(t), q_s^\nabla(t)) = \text{const} \end{aligned} \quad (25)$$

证明 按照定理 1 的证明过程, 对于广义准对称性不变量, 可得作用量方程 (18) 和充要条件 (19)。 $\forall y_s \in \bar{U}$, 在无限小变换 (20) 下, I^* 是广义准对称不变量的充要条件是 (19) 式成立。故根据时间尺度上 Delta 变分问题的非完整力学系统的 Noether 守恒量^[23], 有

$$\begin{aligned} & L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\hat{\Delta}}(t))(-\tau^*(t, q_s^*(t))) - \\ & \partial_1 L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\hat{\Delta}}(t))\hat{\mu}(t) \cdot \\ & (-\tau^*(t, q_s^*(t))) + \\ & \partial_3 L^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\hat{\Delta}}(t)) \cdot \\ & [\xi_s^*(t, q_k^*(t)) + \tau^*(t, q_k^*(t))(q_s^*)^{\hat{\Delta}}(t)] - \\ & G^*(t, (q_s^*)^{\hat{\sigma}}(t), (q_s^*)^{\hat{\Delta}}(t)) = \text{const} \end{aligned} \quad (26)$$

由 (9) 和 (22) 式, 上式可进一步得

$$\begin{aligned} & -L(-t, q_s^\rho(-t), q_s^\nabla(-t))\tau(-t, q_k(-t)) - \\ & \partial_1 L(-t, q_s^\rho(-t), q_s^\nabla(-t))\nu(-t)\tau(-t, q_k(-t)) - \\ & \partial_3 L(-t, q_s^\rho(-t), q_s^\nabla(-t)) \cdot \\ & [\xi_s(-t, q_k(-t)) - \tau(-t, q_k(-t))q_s^{\nabla\nabla}(-t)] - \\ & G(-t, q_s^\rho(-t), q_s^\nabla(-t)) = \text{const} \end{aligned} \quad (27)$$

令 $x \in [t_a, t_b]_k \subseteq [a, b]_k, x = -t$, 则上式为

$$\begin{aligned} & L(x, q_s^\rho(x), q_s^\nabla(x))\tau(x, q_k(x)) + \\ & \partial_1 L(x, q_s^\rho(x), q_s^\nabla(x))\nu(x)\tau(x, q_k(x)) + \\ & \partial_3 L(x, q_s^\rho(x), q_s^\nabla(x)) \cdot \\ & [\xi_s(x, q_k(x)) - \tau(x, q_k(x)) \cdot q_s^{\nabla\nabla}(x)] + \\ & G(x, q_s^\rho(x), q_s^\nabla(x)) = \text{const} \end{aligned} \quad (28)$$

得到守恒量 (25)。定理证得。

(25) 式可称为时间尺度上 Nabla 变分问题的非完整力学系统的守恒量。

由以上定理可得如下推论

推论 1 当 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, 非完整约束 $\Lambda = 0$ 时, 利用 (17) 式可得到经典的 Noether - Bessel - Hagen

方程^[28]

$$\begin{aligned} & \partial_1 L(t, q_s, \dot{q}_s)\tau(t, q_k) + \partial_2 L(t, q_s, \dot{q}_s)\xi_s(t, q_k) + \\ & \partial_3 L(t, q_s, \dot{q}_s)\xi_s(t, q_k) + \\ & L(t, q_s, \dot{q}_s)\dot{\tau}(t, q_k) - \partial_3 L(t, q_s, \dot{q}_s)\dot{\tau}(t, q_k) \cdot \\ & \dot{q}_s(t) + Q_s(t, q_k, \dot{q}_k) \cdot \\ & [\xi_s(t, q_k) - \dot{q}_s(t)\tau(t, q_k)] = \\ & - \dot{G}(t, q_s, \dot{q}_s) \end{aligned} \quad (29)$$

根据定理 2, 可得经典的非完整非保守系统的守恒量^[29]

$$\begin{aligned} & C(t, q_s(t), \dot{q}_s(t)) = \\ & L(t, q_s(t), \dot{q}_s(t))\tau(t, q_k(t)) + \\ & \partial_3 L(t, q_s(t), \dot{q}_s(t)) \cdot (\xi_s(t, q_k(t)) - \\ & \tau(t, q_k(t)) \cdot \dot{q}_s(t)) + G(t, q_s(t), \dot{q}_s(t)) = \text{const} \end{aligned} \quad (30)$$

4 算 例

定义时间尺度

$$\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

已知二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}((q_1^\nabla)^2 + (q_2^\nabla)^2) \quad (31)$$

所受的非完整约束为

$$f = q_1^\nabla + tq_2^\nabla - q_2 + t = 0 \quad (32)$$

由运动微分方程 (11) 给出

$$q_1^{\nabla\nabla} = \lambda, q_2^{\nabla\nabla} = \lambda t \quad (33)$$

由 (32) 和 (33) 可得

$$\lambda = -\frac{2}{2+t^2} \quad (34)$$

由 (32) 式、(33) 和 (34) 式求得

$$A_1 = -\frac{1}{2+t^2}, A_2 = -\frac{t}{2+t^2} \quad (35)$$

根据 (17) 式和 (4) 式, 可得

$$\begin{aligned} & q_1^\nabla \xi_1^\nabla + q_2^\nabla \xi_2^\nabla + L\tau^\nabla - ((q_1^\nabla)^2 + (q_2^\nabla)^2)\tau^\nabla + \\ & A_1(\xi_1^\rho - \tau^\rho q_1^{\nabla\rho}) + A_2(\xi_2^\rho - \tau^\rho q_2^{\nabla\rho}) = -G^\nabla \end{aligned} \quad (36)$$

$$\xi_1^\rho - \tau^\rho q_1^{\nabla\rho} + t(\xi_2^\rho - \tau^\rho q_2^{\nabla\rho}) = 0 \quad (37)$$

对 (36) 式和 (37) 式进行求解

$$\tau = 0, \xi_1 = t, \xi_2 = -\frac{1}{2}, G = -q_1 \quad (38)$$

所以根据定理 2, 可得到守恒量

$$C = tq_1^\nabla - \frac{1}{2}q_2^\nabla - q_1 = \text{const} \quad (39)$$

5 结 论

时间尺度将离散和连续进行了统一, 其微积分

有多种表达形式,如 Δ 型、 ∇ 型、 α 型^[6]以及 \diamond 混合型等^[30],本文主要研究前两个。虽然 Δ 导数与 ∇ 导数,在形式上有诸多相似之处,但在实际计算中两者又有不同。本文根据对偶时间尺度,利用二者之间的等式关系,建立了 ∇ 导数的非完整力学系统的Lagrange微分方程。根据时间尺度上无限小变换下的广义准对称不变量,得到了时间尺度上Nabla变分问题的非完整力学系统的Noether等式和守恒量,并讨论了在取特殊条件时,得到相应的经典力学中Noether定理。文章是对时间尺度上Nabla变分问题在分析力学中的应用进行了研究,可进一步拓展到其它力学系统。本文只是研究了 ∇ 导数力学系统的Noether理论,从形式上也是一种特殊情况,文章可进一步研究更为一般情况的表达形式,如 \diamond 混合型等力学系统的Noether理论。

致谢:对张毅教授的悉心指导深表感谢!

参考文献:

- [1] HILGER S. Ein maßkettenkalkül mit anwendung auf zentrums mannigfaltigkeiten [D]. Würzburg: Universität Würzburg, 1988.
- [2] HILGER S. Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus [J]. Results Math, 1990, 18(1/2):18–56.
- [3] HILGER S. Differential and difference calculus—unified [J]. Nonlinear Anal, 1997, 30(5):2683–2694.
- [4] ATICI F M, GUSEINOV G S. On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales [J]. J Comput Appl Math, 2002, 141(1/2):75–99.
- [5] BOHNER M. Calculus of variations on time scales [J]. Dynam Systems Appl, 2004, 13(12):339–349.
- [6] AHLBRANDT C D, BOHNER M, RIDENHOUR J. Hamiltonian systems on time scales [J]. J Math Anal Appl, 2000, 250(2):561–578.
- [7] AGUILAR R C, RETEGUI L A, POSTEL-VINAY M C. Higher-order calculus of variations on time scales [J]. Springer Berlin Heidelberg, 2008, 136(1):149–159.
- [8] ZHAN Z D, WEI W, XU H L. Hamilton-Jacobi-Bellman equations on time scales [J]. Math Comput Model, 2009, 49(9/10):2019–2028.
- [9] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equation on time scales—An introduction with applications [M]. Boston Basel Berlin: Birkhäuser, 2001.
- [10] BOHNER M, PETERSON A. Advances in dynamic equation on time scales [M]. Boston Basel Berlin: Birkhäuser, 2003.
- [11] ATICI F M, BILES D C, LEBEDINSKY A. An application of time scales to economics [J]. Math Comput Model, 2006, 43(7/8):718–726.
- [12] MARTINS N, TORRES D F M. Calculus of variations on time scales with Nabla derivatives [J]. Nonlinear Anal, 2008, 71(12):e763–e773.
- [13] CAPUTO M C. Time Scales: from Nabla calculus to Delta calculus and vice versa via duality [J]. Int J Difference Equ, 2010, 5(1):25–40.
- [14] BOURDIN L. Nonshifted calculus of variations on time scales with ∇ -differentiable σ [J]. J Math Anal Appl, 2014, 411(2):543–554.
- [15] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用 [M]. 北京:科学出版社, 1999.
MEI F X. Applications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems [M]. Beijing: Science Press, 1999.
- [16] CHEN X W, LI Y M, ZHAO Y H. Lie symmetries, perturbation to symmetries and adiabatic invariants of Lagrange system [J]. Physics Letters A, 2005, 337(4/5/6):274–278.
- [17] 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的Noether对称性与守恒量 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(4):45–50.
ZHANG Y. Noether symmetry and conserved quantity for a fractional action-like variational problem in phase space [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(4):45–50.
- [18] LUO S K, LI Z J, PENG W, et al. A Lie symmetrical basic integral variable relation and a new conservation law for generalized Hamiltonian systems [J]. Acta Mechanica, 2013, 224(1):71–84.
- [19] 金世欣, 张毅. 相空间含时滞的非保守力学系统的Noether定理 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2014, 53(4):56–61.
JIN S X, ZHANG Y. Noether theorem for nonconservative mechanical system with time delay in phase space [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(4):56–61.
- [20] ZHAI X H, ZHANG Y. Noether symmetries and conserved quantities for Birkhoffian systems with time delay [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(1/2):73–86.
- [21] 何胜鑫, 朱建青, 张毅. 基于分数阶模型的非保守系统的Noether准对称性 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(2):58–63.
HE S X, ZHU J Q, ZHANG Y. Noether quasi-symmetry for non-conservative systems based on fractional model [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(2):58–63.

- [22] BARTOSIEWICZ Z, TORRES D F M. Noether, theorem on time scales[J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 342(2): 1220 – 1226.
- [23] CAI P P, FU J L, GUO Y X. Noether symmetries of the nonconservative and nonholonomic system on time scales [J]. *Sci China: Phys Mech Astron*, 2013, 56(5): 1017 – 1028.
- [24] SONG C J, ZHANG Y. Noether theorem for Birkhoffian systems on time scales [J]. *J Math Phys*, 2015, 56: 102701.
- [25] 张毅. 时间尺度上 Hamilton 系统的 Noether 理论[J]. *力学季刊*, 2016, 37(2):214 – 224.
ZHANG Y. Noether theory for Hamiltonian system on time scales[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2016, 37(2):214 – 224.
- [26] ZU Q H, ZHU J Q. Noether theorem for nonholonomic nonconservative mechanical systems in phase space on time scales[J]. *J Math Phys*, 2016, 57:082701.
- [27] MARTINS N, TORRES D F M. Noether's symmetry theorem for Nabla problems of the calculus of variations [J]. *App Math Lett*, 2010, 23(12):1432 – 1438.
- [28] VUJANOVIĆ B. A study of conservation laws of dynamical systems by means of the differential variational principles of Jourdain and Gauss[J]. *Acta Mech*, 1987, 65(1/2/3/4):63 – 80.
- [29] 刘端. 非完整非保守动力学系统的守恒律[J]. *力学学报*, 1989, 21(1):75 – 83.
LIU D. Conservation laws of nonholonomic nonconservative dynamical systems [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 21(1):75 – 83.
- [30] SHENG Q, FADAG M, HENDERSON J. An exploration of combined dynamic derivatives on time scales and their applications[J]. *Nonlinear Ana Real World Appl*, 2006, 7(3):395 – 413.

(上接第 57 页)

- [10] LIANG H, WU J P, CHENG M. A standardized data model for data sharing of GIS and microscopic traffic simulation system [C]// *Proceedings of 2008 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics, IEEE/SOLI 2008*. USA: IEEE, 2008: 116 – 120.
- [11] 张奇, 商蕾. 面向微观交通仿真的路网建模模块实现方法[J]. *交通信息与安全*, 2010, 28(3):112 – 115.
ZHANG Q, SHANG L. Method to implement road network modeling module in microscopic traffic simulation [J]. *Journal of Transport Information and Safety*, 2010, 28(3):112 – 115.
- [12] 黄敏, 饶明雷, 李敏. 面向仿真的车道级基础路网模型及其应用[J]. *系统仿真学报*, 2014(3):657 – 661; 681.
HUANG M, RAO M L, LIN M. Research of lane-level basic road network model for simulation and its application[J]. *Journal of System Simulation*, 2014(3):657 – 661;681.
- [13] 饶明雷. 车道级基础路网数据模型及其在 ITS 中的应用研究[D]. 广州: 中山大学, 2013.
RAO M L. Research of lane-level basic road network data model and its application in ITS[D]. Guangzhou: Sun Yat-sen University, 2013.
- [14] SHEFFI Y. *Urban transportation networks: Equilibrium analysis with mathematical programming methods* [M]. NJ: Prentice Hall, 1984:10 – 18.
- [15] 张小兰, 陈晓翔, 黄敏. 面向指路标志系统的交通网络数据模型及应用[J]. *地理与地理信息科学*, 2006, 22(6):45 – 47.
ZHANG X L, CHEN X X, HUANG M. Transportation network data model for guide sign system and its application [J]. *Geography and Geo-Information Science*, 2006, 22(6):45 – 47.